TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

# חדו"א 1מ - 104010

## בחינת סוף סמסטר, חורף, תשנ"ו - 11.2.96 - מועד א'

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או מחשבון. השאלון מכיל 3 עמודים. יש לרשום את התשובות הסופיות ואת הנימוקים וההוכחות הנדרשות בגוף השאלון. השאלון מכיל 8 שאלות. משקלה של כל שאלה רשום ליד מספרה.

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| | |

שם משפחה ופרטי:

מספר סטודנט:

---

**.1** *(8%)* אדם מעיף עפיפון, הנע מזרחה במהירות קבועה של 25 מטר לשניה ובגובה קבוע של 30 מטר מעל פני הקרקע (הקרקע מישורית). באיזו מהירות $V$ האדם משחרר את החבל כאשר אורך החבל 50 מטר (הנח שלחבל אין "בטן", כלומר שהחבל ישר).

רשום תשובה סופית בלבד:

$V =$

**.2** *(10%)* תחנת כוח שהחלה לפעול בזמן $t = 0$ מייצרת חשמל בקצב קבוע של 1 יחידות אנרגיה ליחידת זמן לאוכלוסיה, שברגע $t$ צורכת $\frac{t^2+2t}{t^2+2t+1}$ יחידות אנרגיה ליחידת זמן.
בתחנה קיים מתקן לאגירת האנרגיה העודפת בקיבול כולל של $Q$ יחידות אנרגיה.

א. מהי הכמות הכוללת $z(t)$ של עודפי האנרגיה המצטברת מרגע פתיחת התחנה ועד הרגע $t$?

$z(t) =$

ב. מהו הערך המינימלי של $Q$, שיאפשר לאגור את כל האנרגיה העודפת, שתצטבר במהלך השנים?
הקף בעיגול את התשובה הנכונה.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln 2$ | $\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | 20 | 40 | $\frac{1}{4}$ | 10 |

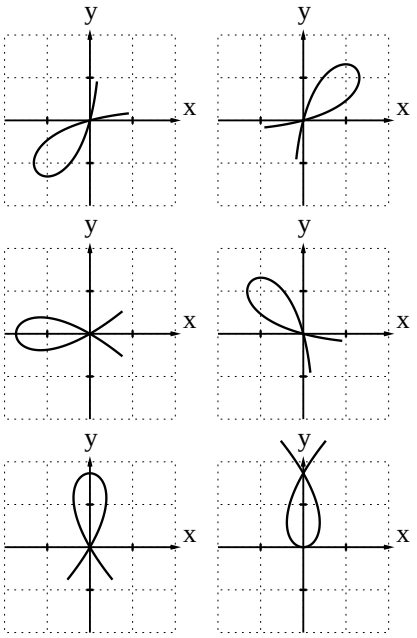
**.3** *(24%)* רשום להלן תשובות סופיות בלבד:

$\int_{-e}^{-1} \frac{dx}{x} =$ $\qquad$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx =$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} (\cos \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} =$

$\int \frac{(2x+8)\,dx}{x^2+2x+2} =$ $\qquad$ $\inf_{0<x<\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{x} =$ $\qquad$ $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} =$

**.4** *(10%)* א. הקף בעיגול את הציור, המתאר בצורה הטובה ביותר את העקום הנתון על ידי

$$\begin{cases} x(t) &= t^3 - t \\ y(t) &= \sqrt{3}(1-t^2) \end{cases} \qquad -\infty < t < \infty$$




ב. מהו אורך הלולאה שנוצרת על ידי העקום המתואר בחלק א'?
הקף בעיגול את התשובה הנכונה.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2\sqrt{3}$ | $4$ | $\tan\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{9}{2}$ | $\ln(e^3-e)$ |

**.5** *(12%)* נתונה נקודה $P=(5,1,1)$ ושלושה מישורים:

$$\pi_1 = \{(x,y,z) \mid y=0\}, \qquad \pi_2 = \{(x,y,z) \mid x+2y=5\}, \qquad \pi_3 = \{(x,y,z) \mid y+z=1\}$$

נסמן ב־ $\ell$ את הישר $\pi_2 \cap \pi_3$ (החיתוך בין $\pi_2$ לבין $\pi_3$) וב־ $Q$ את הנקודה $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.

א. מצא את הנקודה $Q$:

$Q = (\quad , \quad , \quad )$

ב. מצא הצגה פרמטרית לישר $\ell$:

$$\ell : \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$$

ג. מהו המרחק שבין הנקודה $P$ לישר $\ell$? הקף בעיגול את התשובה הנכונה:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{5}{6}}$ | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\sqrt{\frac{6}{5}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

**.6** *(8%)* מצא את הנפח של התחום המרחבי הנמצא בין המשטח הנתון בשעורים קרטזיים על ידי $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ לבין המישור $z=3$. הקף בעיגול את התשובה הנכונה:
(שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ הוא $\pi ab$)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $6\pi$ | $7\pi$ | $8\pi$ | $9\pi$ | $10\pi$ | $11\pi$ | $12\pi$ |

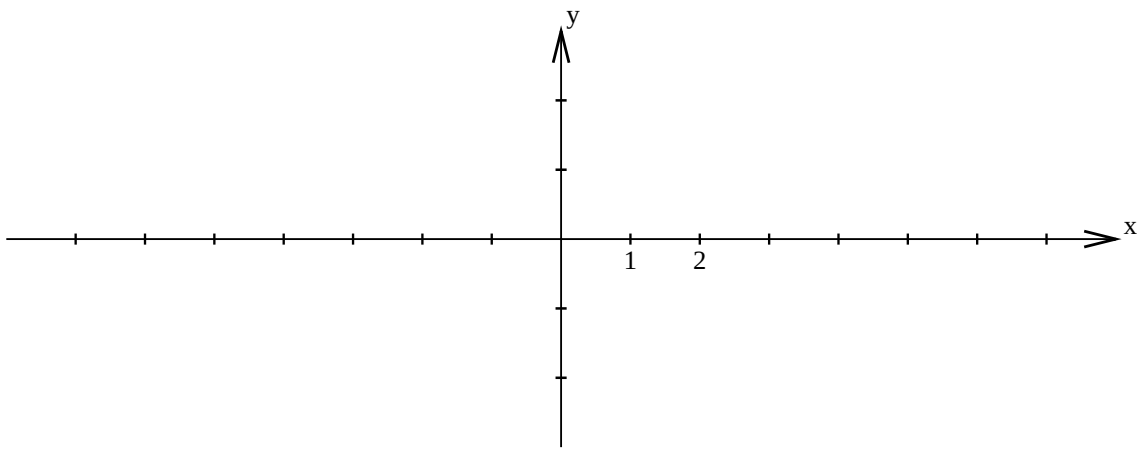
**7.** *(20%)* נתונה הפונקציה $f(x)=\int_2^x e^{-t^2}dt$ , $-\infty < x < \infty$.

א. האם לגרף של הפונקציה יש אסימפטוטה אופקית כאשר $x$ שואף לאינסוף? נמק.

ב. רשום במסגרת עבור אלו ערכים של $x$ הפונקציה $f$ קמורה?

(דהיינו קמורה כלפי מעלה).

ג. צייר באופן סכימטי את הגרף של הפונקציה $f$.




ד. הוכח כי $f$ חד-חד ערכית ב־ $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה:</u>

ה. מצא את $g'(0)$ אם $g=f^{-1}$ היא הפונקציה ההפוכה ל־ $f$. הקף בעיגול את התשובה הנכונה:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(0)$ לא קיים | $-2$ | $1$ | $\frac{1}{e^4}$ | $e^4$ | $0$ | $\frac{1}{e^2}$ | $e^2$ |

**8.** *(8%)* הוכח שלכל פונקציה $f$ בעלת נגזרת שניה רציפה בקטע $[-1,1]$ המקיימת $f(0)=f'(0)=0$ , קיים קבוע $A$ (התלוי בפונקציה $f$), כך ש־ $|f(x)|\le Ax^2$ לכל $x$ בקטע $[-1,1]$.

<u>רשום את ההוכחה מעבר לדף:</u>

**בהצלחה!**